L.B. Monastir	**Devoir de Synthèse n : 1**	$4^{ème}$ *Math*
P.P. : Ali Zouhaier	*Durée : 120 minutes*	**06 / 12/ 2010**

Exercice 1 : (3 points = 3×1 point)

Dans chacune des questions suivantes une seule des trois propositions est correcte.
L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie .

1) Soit ABCD un carré de sens direct et $f = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AB)}$. f est une :

a) rotation **b**) Symétrie orthogonale **c**) Symétrie glissante.

2) Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+3}$ et

$v_n = \dfrac{(n+2)+1}{n+2}$; $\forall n \in IN$.

a) (u_n) et (v_n) sont adjacentes **b**) (u_n) et (v_n) ne sont pas adjacentes

3) Soit $f : P \to P; M(z) \mapsto M'(z')$ est une isométrie

Une des transformées complexes suivantes est celle de f

a) $z \mapsto z' = 2iz + 1 + 2i$ **b**) $z \mapsto z' = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}z^2 - 1 - 2i$ **c**) $z \mapsto z' = e^{i\pi}\overline{z} + 3 + i$.

Exercice 2 : (3 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - (4+11i)z^2 + (-33+32i)z + 60 + 27i = 0$.

1)**a**- Montrer que l'équation (E) possède une solution imaginaire que l'on précisera. **0,5**

b- Résoudre alors l'équation (E). **1,00**

2) Soient les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3 + 2i$, $z_B = 3i$ et $z_C = 1+6i$, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé .

Montrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle. **0,5**

3) Soit E le point tel que ABCE est un carré. On pose $f = S_{(AB)} o S_{(BC)} o S_{(CE)}$.

a- Comparer $S_{(BC)} o S_{(CE)}$ et $S_{(CE)} o S_{(BC)}$. **0,5**

b- Montrer que f est une symétrie glissante que l'on caractérisera. **0,75**

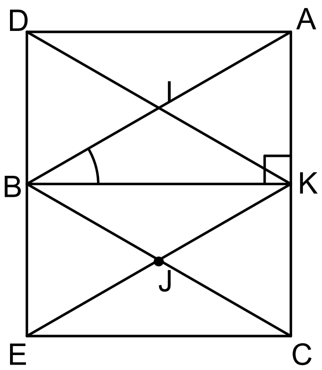
Exercice 3 : (5 points)

ADBK est un rectangle de centre I tel que

$\left(\widehat{\overrightarrow{BK};\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$. $C = S_{(BK)}(A)$

$J = B*C = K*E$. $B' = S_{(AD)}(B)$.

Soit f l'isométrie qui n'a pas de point fixe et qui transforme A en B et B en C et K en E.



1/**a**- Prouver que ABC est équilatéral. **0,75**

b- Prouver que (IJ) est la médiatrice de [KB]. **0,5**

2/ Prouver que f n'est pas une translation. Déduire la nature de f. **0,5+0,5**

3/ Montrer que $f(I) = J$. **0,5**

4/ Soit l'isométrie $\varphi = f \circ S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{JI}}$

a) Déterminer $\varphi(J)$ et $\varphi(C)$ et $\varphi(E)$ **0,75**

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f. **0,75**

Exercice 4 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(0) = 0$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$; $\forall x \in IR^*$

On désigne par C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé R.

1)**a**- Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{2}$, interpréter le résultat graphiquement.

b- Vérifier que pour tout x ∈ IR* , $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$

c- Dresser le tableau de variation de f et tracer T et C_f avec T la tangente à C_f en son point d'abscisse 0. **0,5+0,75**

2)**a**- Montrer que f réalise une bijection de IR sur]-1 , 1[. **0,25**

b- Construire la courbe $C_{f^{-1}}$ de la fonction f^{-1} dans le même repère R. **0,5**

c- Montrer que pour tout x ∈]-1 , 1[; $f\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right) = x$. Déterminer alors $f^{-1}(x)$ en fonction de x. **0,5+0,25**

4) Soit h la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par : h(x) = f(tan x).

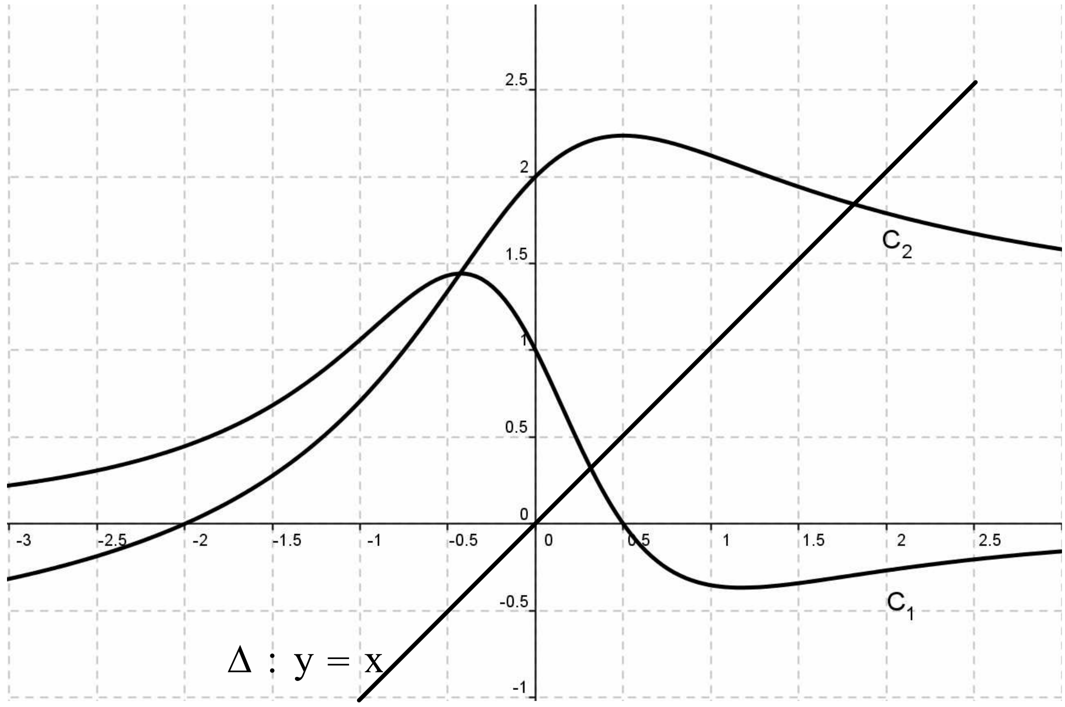
a- Montrer que h est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que $h'(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$ **0,25+0.25**

b- En déduire que h est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle K que l'on déterminera. **0,25**

c- Montrer que h^{-1} est dérivable sur K et expliciter $(h^{-1})'(x)$ en fonction de x. **0,5**

Exercice 5 : (4 points)

Dans le graphique ci-dessous C_1 et C_2 sont les courbes représentatives d'une fonction f définie sur [-3 , 3] et de sa fonction dérivée f'.



L'élève utilisera le graphique ci-dessus comme source des données

1) Justifier que C_1 ne peut pas être la courbe de f. **0,5**

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-2}{x}$. **0,5**

3) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $]\frac{3}{2}, 2[$ une solution unique α. **0,5**

4) Soit u la suite définie sur IN par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$; ∀n ∈ IN

a/ Montrer que pour tout n ∈ IN , $\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$. **0,5**

b/ Montrer que pour tout n ∈ IN , $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ **0,75**

c/ En déduire que ∀n ∈ IN , $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. **0,75**

BON TRAVAIL

Exercice 1 :

1)	2)	3)
c)	a)	c)

Exercice 2 :

1)a- Soit y un réel.

(iy) est une solution imaginaire de (E)

$\Leftrightarrow (iy)^3-(4+11i)(iy)^2+(-33+32i)(iy)+60+27i=0$

$\Leftrightarrow 4y^2-32y+60+i(-y^3+11y^2-33y+27)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2-32y+60=0 \\ -y^3+11y^2-33y+27=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \text{ ou } y=3 \\ -y^3+11y^2-33y+27=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow y=3$ car seul 3 vérifie $-y^3+11y^2-33y+27=0$

Conclusion : 3i est la solution imaginaire de (E).

b) 3i est une racine du polynome $P : z \mapsto z^3-(4+11i)z^2+(-33+32i)z+60+27i$

donc il existe trois nombres complexes a,b et c tels que pour tout z de $\mathbb{C}$ on a :

$$z^3-(4+11i)z^2+(-33+32i)z+60+27i=(z-3i)(az^2+bz+c)$$
$$=az^3+(b-3ia)z^2+(c-3ib)z-3ic$$

$$\text{par suite } \begin{cases} a=1 \\ b-3ia=-4-11i \\ c-3ib=-33+32i \\ -3ic=60+27i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4-8i \\ c=-9+20i \end{cases}$$

Alors (E) $\Leftrightarrow (z-3i)(z^2+(-4-8i)z+-9+20i)=0$

$\Leftrightarrow z-3i=0$ ou $z^2+(-4-8i)z+-9+20i=0$

$(\Delta=(-4-8i)^2-4(-9+20i)=-12-16i$

$=-4(3+4i)=[2i(2+i)]^2=(-2+4i)^2)$

$\Leftrightarrow z=3i$ ou $z=\dfrac{4+8i-(-2+4i)}{2}$ ou $z=\dfrac{4+8i+(-2+4i)}{2}$

$\Leftrightarrow z=3i$ ou $z=3+2i$ ou $z=1+6i$.

Conclusion: $S_{\mathbb{C}}^{(E)}=\{3i;\ 3+2i;\ 1+6i\}$

2) $AB=|3i-3-2i|=|-3+i|=\sqrt{10}$

$AC=|z_C-z_A|=|1+6i-3-2i|=\sqrt{20}$

$BC=|z_C-z_B|=|1+6i-3i|=|1+3i|=\sqrt{10}$

Ainsi $AB=BC=\sqrt{10}$ et $AC^2=AB^2+BC^2$ par suite ABC est un triangle rectangle et isocèle.

3)a- ABCE est un carré donc $(BC)\perp(CE)$

alors $S_{(BC)}oS_{(CE)}=S_E$ et $S_{(CE)}oS_{(BC)}=S_E$ la symétrie centrale de centre le point E.

ce qui donne que $S_{(BC)}oS_{(CE)}=S_{(CE)}oS_{(BC)}$.

b- $f=S_{(AB)}\circ S_{(BC)}\circ S_{(CE)}$

$=S_{(AB)}\circ S_{(CE)}\circ S_{(BC)}$

$=t_{2\overrightarrow{CB}}\circ S_{(BC)}$ car (AB)//(CE) et B est le projeté orthogonal de C sur B.

Comme $2.\overrightarrow{CB}$ est un vecteur directeur de (BC) alors f est la symétrie glissante de vecteur $2.\overrightarrow{CB}$ et d'axe (BC).

Exercice 3 :

1/a- $C = S_{(BK)}(A) \Rightarrow (BK) = \text{méd}[AC] \Rightarrow BC = BA \quad (1)$

$C = S_{(BK)}(A) \Rightarrow \widehat{(\overrightarrow{BK};\overrightarrow{BA})} \equiv -\widehat{(\overrightarrow{BK};\overrightarrow{BC})}\ [2\pi]$

Ce qui permet de dire $\widehat{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BK})} + \widehat{(\overrightarrow{BK};\overrightarrow{BA})}\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{3}\quad [2\pi] \qquad (2)$

(1) et (2) $\Rightarrow$ ABC est équilatéral.

b- ADBK est un rectangle de centre I $\Rightarrow IB = IK. \quad (3)$

$J=B*C$ et $K=A*C \Rightarrow JK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC = JB$

$\Rightarrow JK = JB \qquad (4)$

(3) et (4) $\Rightarrow$ (IJ) est la médiatrice du segment [KB].

2/ supposons par l'absurde que f est une translation

donc $f(A) = B$ et $f(B) = c$ impliquent que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ ce qui est absurde

donc notre supposition est fausse et f n'est pas une translation.

• f est une isométrie sans points fixes et elle n'est pas une translation alors f est une symétrie glissante.

3/ • $f(I) = f(A * B) = f(A) * f(B)$ (conservation du milieu)

$= B * C = J.$

4/ Soit l'isométrie $\varphi = f \circ S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{JI}}$

a) • $\varphi(J) = f \circ S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{JI}}(J) = f \circ S_{(IJ)}(I) = f(I) = J.$

• $\varphi(C) = f \circ S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{JI}}(C) = f \circ S_{(IJ)}(K) = f(B) = C.$

• $\varphi(E) = f \circ S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{JI}}(E) = f \circ S_{(IJ)}(B) = f(K) = E.$

b) φ est une isométrie du plan qui fixe trois points non alignés J, C et K

donc $\varphi = Id_P \iff f \circ S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{JI}} = Id_P$

$\iff f \circ S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{JI}} \circ t^{-1}_{\overrightarrow{JI}} \circ S_{(IJ)} = Id_P \circ t^{-1}_{\overrightarrow{JI}} \circ S_{(IJ)}$

$\iff f = t_{\overrightarrow{IJ}} \circ S_{(IJ)}.$

Comme $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur directeur de (IJ) alors f est la symétrtie glissante de vecteur $\overrightarrow{IJ}$ et d'axe (IJ).

Exercice 4 :

1)**a**- $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} \frac{1+x^2-1}{x^2\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{1}{2}.$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=\frac{1}{2}$ et C_f admet une tangente

d'équation $y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{1}{2}x.$

b- $\forall\ x \in IR^*$, $f'(x)=\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)'x - (x)'\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{x^2}$

$= \dfrac{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}.x - \sqrt{1+x^2}+1}{x^2}$

$$= \frac{\dfrac{x^2-(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}+1}{x^2} = \frac{\dfrac{-1+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{x^2}$$

$$= \frac{\left(-1+\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x^2\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$$

$$= \frac{1+x^2-1}{x^2\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$$

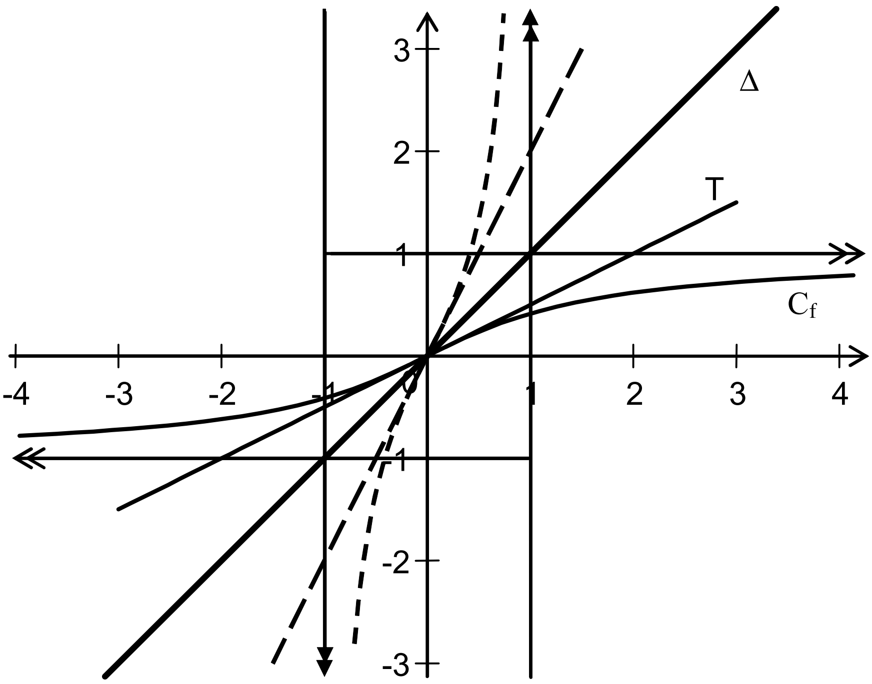
c- • $\forall\ x \in IR^*$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} > 0$ et $f'(0) = \dfrac{1}{2} > 0.$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left[\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1} - \dfrac{1}{x}\right]}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1} - \dfrac{1}{x}\right) = 1$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x\left[\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1} + \dfrac{1}{x}\right]}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1} - \dfrac{1}{x}\right) = -1$

D'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow 1$



2)a- f est continue et strictement croissante sur IR

$\Rightarrow$ f réalise une bijection de IR sur $f(IR) =]-1;1[$

b- $C_{f^{-1}}$ est le symétrique de C_f par rapport à Δ : $y = x$. (voir figure)

c- • pour x=0; $f\left(\dfrac{2\times 0}{1-0^2}\right) = f(0) = 0$

$\bullet\ \forall\, x \in]-1\,,\,1[\setminus\{0\}\ ;\ f\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right) = \dfrac{\sqrt{1+\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)^2}-1}{\dfrac{2x}{1-x^2}}$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{(1-x^2)^2+4x^2}}{1-x^2}-1}{\dfrac{2x}{1-x^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{1-2x^2+x^4+4x^2}-1+x^2}{1-x^2}}{\dfrac{2x}{1-x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(1+x^2)^2}-1+x^2}{2x} = \frac{1+x^2-1+x^2}{2x} = x.$$

$\blacklozenge\ \forall x \in]-1;1[;\ x = f\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$

$\Leftrightarrow\ \forall x \in]-1;1[;\ f^{-1}(x) = f^{-1}\left[f\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)\right]$

$\Leftrightarrow\ \forall x \in]-1;1[;\ f^{-1}(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}.$

4) Soit h la fonction définie sur $]\,0, \frac{\pi}{2}[$ par : $h(x) = f(\tan x)$.

a- $\begin{cases} \text{la fonction tan est dérivable sur }]\,0, \frac{\pi}{2}[\\ \text{f est dérivable sur IR} \\ \forall x \in]\,0, \frac{\pi}{2}[;\ \tan(x) \in \text{IR} \end{cases}$

$\Rightarrow\ h : x \mapsto f(\tan x)$ est dérivable sur $]\,0, \frac{\pi}{2}[$.

$\blacklozenge\ h'(x) = (\tan x)' \times f'(\tan x)$

$$= (1+\tan^2 x)\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}\left(\sqrt{1+\tan^2 x}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}\,\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 x}}\left(\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 x}}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}\,\frac{1}{\dfrac{1}{\cos x}\,\dfrac{1+\cos x}{\cos x}} = \frac{1}{1+\cos x}$$

b- h est dérivable sur $]\,0, \frac{\pi}{2}[$ et que $h'(x) = \dfrac{1}{1+\cos x} > 0$

donc h est continue et strictement croissante sur $]\,0, \frac{\pi}{2}[$

alors h réalise une bijection de $]\,0, \frac{\pi}{2}[$ sur $K=h\left(]0, \frac{\pi}{2}[\right)$

$\bullet\ K=h\left(]0, \frac{\pi}{2}[\right) =]\lim\limits_{x\to 0^+} h(x);\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} h(x)[.$

$*\ \lim\limits_{x\to 0^+} \tan(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0$

$*\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} h(x) = 1.$

Donc $K=]0; 1[$.

c- h est dérivable sur $]\,0, \frac{\pi}{2}[$ et que $h'(x) = \dfrac{1}{1+\cos x} \neq 0$

donc h^{-1} est dérivable sur $h\left(]0, \frac{\pi}{2}[\right) = K$.

$(h^{-1})'(x) = \dfrac{1}{h'(h^{-1}(x))} = \dfrac{1}{1+\cos(h^{-1}(x))}.$

Or $h(h^{-1}(x)) = x \Leftrightarrow f(\tan(h^{-1}(x))) = x$

$$\Leftrightarrow f^{-1}\left[f(\tan(h^{-1}(x))\right] = f^{-1}(x)$$
$$\Leftrightarrow \tan(h^{-1}(x)) = \frac{2x}{1-x^2}.$$

D'autre part $\cos^2(h^{-1}(x)) = \dfrac{1}{1+\tan^2(h^{-1}(x))}$

donc $\cos(h^{-1}(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)^2}}$

par suite $(h^{-1})'(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{1+\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)^2}}$.

Exercice 5 :

1) Supposons par l'absurde que C_2 est la courbe de f donc C_1 sera celui de f'

alors f est croissante sur $\left[-3;\ -2\right]$

Donc $\forall x \in \left[-3;\ -2\right];\ f'(x) \geqslant 0$

Par suite la courbe de f' est au dessus de l'axe des abscisses ce qui contredit le graphique .

Ainsi notre supposition est fausse et on a bien C_1 est la courbe de f.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ car $A(0;2) \in C_1$

$= f'(0) = 1$ car $B(0;1) \in C_2$.

3) La courbe C_1 : $\begin{cases} y = f(x) \\ x\in [-3;3] \end{cases}$ et la droite Δ : $y = x$ ont un seul point

d'intersection dont l'abscisse appartient à $]\frac{3}{2}, 2[$

Donc l'équation f(x) = x admet dans $]\frac{3}{2}, 2[$ une solution unique α.

4) Soit u la suite définie sur IN par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n);\ \forall n \in IN$

a/ • Pour n=0

$u_0 = \frac{3}{2}$ donc $\frac{3}{2} \leqslant u_0 \leqslant 2$ alors la proposition est vraie pour n=0.

$*$ Soit $p \in IN;$ supposons que $\frac{3}{2} \leqslant u_p \leqslant 2;$ montrons que $\frac{3}{2} \leqslant u_{p+1} \leqslant 2.$

en effet : $\frac{3}{2} \leqslant u_p \leqslant 2$

$\Rightarrow f(2) \leqslant f(u_p) \leqslant f\left(\frac{3}{2}\right)$ car f est décroissante sur $\left[\frac{3}{2};2\right]$

Or d'après le graphique $f(2) > \frac{3}{2}$ et $f\left(\frac{3}{2}\right) < 2$ par suite $\frac{3}{2} \leqslant u_{p+1} \leqslant 2.$

Conclusion: Pour tout $n \in IN$, $\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2.$

b/ On a C_2 (la courbe de f') est au dessous de l'axe des abscisses et au dessus de la doite (d) : $y = \frac{-1}{2}$ sur $\left[\frac{3}{2};2\right]$ par suite $\forall x \in \left[\frac{3}{2};2\right],\ \frac{-1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant 0$

Ce qui permet de dire $\forall x \in \left[\frac{3}{2};2\right],\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$

comme de plus f est dérivable sur $\left[\frac{3}{2};2\right]$ donc d'après le théorème des

inégalités d'accroissements finis on a : $\forall \in IN$, $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

C'est à dire $\forall \in IN$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ car $f(\alpha) = \alpha$.

c/ ♣ Pour n=0

$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ et $|u_0 - \alpha| = \left|\frac{3}{2} - \alpha\right| \leqslant \frac{1}{2} < 1$ car $\alpha \in \left[\frac{3}{2};2\right]$

donc $|u_0 - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0$ alors la proposition est vraie pour n=0.

♠ Soit $p \in \mathbb{N}$; supposons que $|u_p - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^p$; montrons que $|u_{p+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}$. En effet :

$|u_p - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^p \Rightarrow \frac{1}{2}|u_p - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^p = \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}$

et comme $|u_{p+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_p - \alpha|$ alors $|u_{p+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}$

Par suite ♣ et ♠ donnent pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

comme de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{2} \in]-1;1[$ par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.